

## 1ª Lista de Exercícios de Eletromagnetismo – Análise Vetorial

- 1) determine o produto escalar nos casos abaixo.
  - a)  $\mathbf{U} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{V} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ ;
  - b)  $\mathbf{U} = 1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{V} = 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ;
  - c)  $|\mathbf{U}|=2$ ,  $|\mathbf{V}|=3$ , o ângulo entre  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  é  $135^\circ$ ;
  - d)  $\mathbf{U} = -3\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{V} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ .
- 2) Determine  $k$  tal que o vetor que parte de  $A(1,-1,3)$  e liga o ponto  $B(3,0,5)$  é perpendicular ao vetor que parte de  $A$  e passa por  $(k,k,k)$ .
- 3) Os pontos  $P$  e  $Q$  estão localizados em  $(0,2,4)$  e  $(-3,1,5)$ . Calcule:
  - a) O vetor posição para cada ponto;
  - b) O vetor distância ligando  $P$  e  $Q$ ;
  - c) A distância entre os dois pontos;
  - d) Um vetor paralelo a linha  $PQ$  com módulo 10.
- 4) Mostre que se  $\mathbf{U} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{V} = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$  e  $\mathbf{V}_2 = b\mathbf{i} - a\mathbf{j}$  são ortogonais a  $\mathbf{U}$ .
- 5) Dados os vetores  $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$  e  $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ , determine:
  - a)  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ ;
  - b)  $5\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ;
  - c) A componente de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{j}$ ;
  - d) Um vetor unitário paralelo a  $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$ .
- 6) Determine nos casos abaixo, a componente vetorial de  $\mathbf{V}$  ao longo de  $\mathbf{B}$  e a componente vetorial de  $\mathbf{V}$  perpendicular a  $\mathbf{B}$ :
  - a)  $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} - 1\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ;
  - b)  $\mathbf{V} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ;
  - c)  $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ;
- 7) Três campos vetoriais são dados por:  
 $\mathbf{P} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{R} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Determine:
  - a)  $(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q})$ ;
  - b)  $\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{P})$ ;
  - c)  $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$ ;
  - d) Um vetor unitário perpendicular a  $\mathbf{Q}$  e a  $\mathbf{R}$ , simultaneamente;
  - e) A componente de  $\mathbf{P}$  ao longo de  $\mathbf{Q}$ .
- 8) Determine dois vetores unitários perpendiculares ao plano definido por  $\mathbf{U} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  e  $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ .
- 9) Determine a área do paralelogramo que tem  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  como lados adjacentes:

- a)  $\mathbf{U}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{V}=3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ;  
b)  $\mathbf{U}=2+3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{V}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

10) Seja  $\theta$  o ângulo entre  $\mathbf{U}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{V}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ :

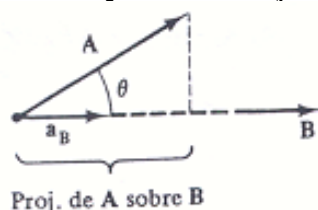
- a) Use o produto escalar para determinar o  $\cos(\theta)$ ;  
b) Use o produto vetorial para determinar o  $\sin(\theta)$ ;  
c) Confirme que  $\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$ .

11) Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|$$

12) Mostre que:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ .

13) Dados  $\mathbf{F} = (y - 1)\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ . Calcule o valor desse vetor aplicado ao ponto (2, 2, 1), bem como sua projeção sobre  $\mathbf{B}$ , dado por:  $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ .



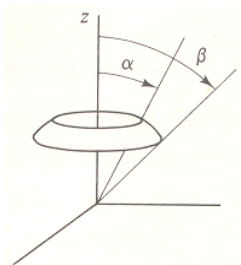
14) Dados  $\mathbf{A}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$  e  $\mathbf{B}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ , mostre que  $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ .

15) Transforme o vetor a seguir, do sistema cartesiano ao cilíndrico.

$$\vec{A} = y\vec{i} + x\vec{j} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k}$$

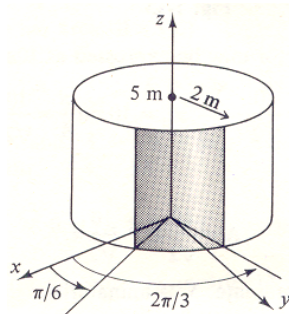
16) Dado um ponto  $P(-2,6,3)$  e o vetor  $\mathbf{A}=y\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}$ , expresse o ponto e o vetor  $\mathbf{A}$  nos sistemas cilíndrico e esférico.

17) Use o sistema esférico para calcular a área da região  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , sobre a casca esférica de raio  $a$  (figura abaixo). Qual o resultado quando  $\alpha = 0$  e  $\beta = \pi$ ?

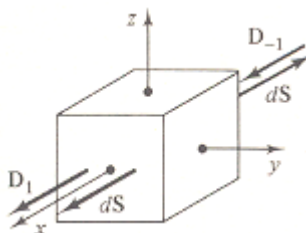


18) Obtenha a equação correspondente ao volume de uma esfera de raio  $a$ , a partir do elemento diferencial de volume.

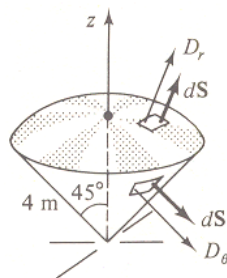
- 19) Utilize o sistema cilíndrico de coordenadas para calcular a área lateral de um cilindro circular reto com  $r = 2\text{m}$ ,  $h = 5\text{m}$ , e  $30^\circ \leq \phi \leq 120^\circ$ . Veja a figura abaixo.



- 20) Determine o gradiente do módulo do vetor posição de um ponto de coordenadas  $(x,y,z)$ .
- 21) Determine o vetor unitário perpendicular a superfície dada por  $x^2+y^2=z$  no ponto  $(1,0,1)$ .
- 22) Determine a derivada direcional da função  $f=XYZ$  segundo a orientação dada pela reta unindo  $(1,1,0)$  a  $(2,1,1)$ , e o máximo valor e sentido da derivada direcional em  $(1,1,0)$ .
- 23) Determine o gradiente da função  $g=xy+yz+xz$  no ponto  $(1,2,3)$  e a derivada direcional da mesma função no mesmo ponto, orientada em direção ao ponto  $(3,4,4)$ .
- 24) Determine a divergência dos seguintes campos vetoriais e os calcule nos pontos especificados:
- $\mathbf{A}=yzi+4xyj+yk$  em  $(1,-2,3)$ ;
  - $\mathbf{B}=rz\sin\phi\mathbf{a}_r+3rz^2\cos\phi\mathbf{a}_\phi$  em  $(5,\pi/2,1)$ ;
  - $\mathbf{C}=2r\cos\theta\cos\phi\mathbf{a}_r+r^{1/2}\mathbf{a}_\phi$  em  $(1, \pi/6, \pi/3)$ .
- 25) Dado  $\mathbf{D} = (10x^3/3)\mathbf{i}$  ( $\text{C/m}^2$ ), calcule ambos os lados do teorema da divergência, para o volume de um cubo de  $2\text{m}$  de aresta, centrado na origem e com os lados paralelos aos eixos. Resp:  $Q = 80/3 \text{ C}$ .



- 26) Dado  $\mathbf{D} = (5r^2/4)r$  ( $\text{C/m}^2$ ) em coordenadas esféricas, calcule ambos os lados do teorema da divergência para o volume limitado por  $r = 4\text{m}$  e  $\theta = \pi/4$ . Resp:  $Q = 589,1 \text{ C}$ .



- 27) Um campo vetorial é dado por  $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + yy\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ . Determine a integral de linha sobre o caminho ligando a origem ao ponto (1,1,1) de tal forma que:
- o caminho é uma linha reta;
  - O caminho é uma sucessão de segmentos retos ligando (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1).
- 28) Refaça o exercício anterior para o campo  $\mathbf{B} = 3x^2y^2z\mathbf{i} + 2x^3yz\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}$ .
- 29) Para um campo vetorial  $\mathbf{A}$ , mostre explicitamente que o divergente do rotacional de  $\mathbf{A}$  é nulo.
- 30) Determine o laplaciano da função  $U = x^2y + xyz$ .